

# LE LAIT

## REVUE GÉNÉRALE DES QUESTIONS LAITIÈRES

### SOMMAIRE

#### Mémoires originaux :

P. CADOR et P. MACHEREL. — Notes pour une étude rationnelle des méthodes acido-butyrométriques. Graduation des butyromètres à lait . . . . .	290
J. PIEN. — Le contrôle de la pasteurisation du lait et de la crème . . . . .	311
R. MOREAU. — L'emploi du disque d'Ackermann . . . . .	320

#### Revue :

Le lait, matière première de l'industrie chimique moderne . . . . .	322
---	-----

#### Bibliographie analytique :

1 <sup>o</sup> Les livres . . . . .	326
2 <sup>o</sup> Journaux, Revues, Sociétés savantes . . . . .	334

#### Documents et informations :

M. BEAU. — La situation laitière . . . . .	367
Société Française d'Encouragement de l'Industrie laitière. . . . .	372
Foire de Lyon . . . . .	373
Erratum . . . . .	373
Table des matières . . . . .	374
Table des auteurs . . . . .	379
Table des ouvrages analysés . . . . .	384

## MÉMOIRES ORIGINAUX (1)

### NOTES POUR UNE ÉTUDE RATIONNELLE DES MÉTHODES ACIDO-BUTYROMÉTRIQUES

#### GRADUATION DES BUTYROMÈTRES A LAIT

par

P. CADOR  
Ingénieur Agronome.

et P. MACHEREL  
Ingénieur Agricole.  
Diplômé des Etudes Supérieures  
des Industries du Lait.

#### I. Introduction. Formule générale

Nous avons précédemment exposé [1] la théorie générale des méthodes acido-butyrométriques, prenant comme exemple d'application l'étude des deux méthodes acido-butyrométriques d'analyse des crèmes les plus utilisées en France, parce que cette étude nous semblait offrir l'intérêt pratique le plus grand, le plus important par ses répercussions dans l'économie nationale, et parce qu'elle nous intéressait particulièrement ; mais il est bien évident que la théorie exposée est valable pour toutes les méthodes acido-butyro-

(1) Reproduction interdite sans indication de source.

métriques ou analogues (BARCOCK), et quels que soient les produits analysés. En particulier, elle est valable pour les méthodes acido-butyrométriques d'analyse des laits.

Nous n'insisterions pas sur ce point si le souvenir de contre-verses épiques à propos des butyromètres Gerber n'était encore présent dans toutes les mémoires : les butyromètres à lait Gerber sont-ils gradués « au litre » ou « au kilogramme » [2] [3] ? et si le feu de la discussion ne couvait pas toujours sous la cendre, prêt à se ranimer à la moindre occasion, car les tenants de l'un ou de l'autre parti, faute d'avoir reçu une démonstration scientifique irrécusable de la justesse de l'une ou de l'autre hypothèse, sont restés sur leur position.

Nous ne nous proposons pas de trancher cette question, laissant ce soin à des chimistes mieux qualifiés que nous. Nous nous proposons simplement d'exposer l'étude théorique de la graduation des butyromètres Gerber à lait telle qu'elle découle des données précédemment dégagées, espérant que cette contribution aidera à la solution totale et définitive du problème.

Nous avons montré que :

si « v » est le volume en centimètres cubes entre le 0 et la graduation lue,

« m » le volume en centimètres cubes des cor dunes ménisque,

« p » le poids en grammes du produit introduit,

et « da » ce que nous avons appelé la densité apparente de la matière grasse séparée par la technique de la méthode considérée ; l'équation générale donnant la teneur % en poids — poids T est :

$$T = \frac{(v + m) da \times 100}{P}$$

## II. Valeur des différents facteurs

### 1° Valeur de da.

Nous avons montré précédemment [1] qu'elle est différente de la densité effective de la matière grasse Gerber (0,883), sauf dans le cas où toute la matière grasse serait séparée par la méthode, et le serait à l'état pur. Or ceci n'est pas. Les densités différentes (à la même température de 70° C.) : 0,883 (PIEN) de la matière grasse Gerber [4], 0,888 (KÖNIGS) de la matière grasse pure, traduisent en effet une différence de composition.

Les attaques Gerber et Köhler étant très voisines nous pensons que la densité apparente de la matière grasse dans la première méthode est peu différente de la densité apparente de la matière grasse dans la deuxième. Dans cette dernière nous avons trouvé

qu'elle était comprise entre 0,880 et 0,900. En première approximation on peut donc admettre que la valeur de la densité apparente de la méthode Gerber est aussi comprise entre 0,883 et 0,910.

Cette valeur est-elle constante ?

La fidélité universellement reconnue à la méthode Gerber autorise cette hypothèse, mais seules des mesures expérimentales précises pourront la confirmer ou l'infirmier.

## 2° Valeur de $m$ .

Une méthode sensible pour la déterminer reste encore à trouver. Nous croyons davantage contribuer à la solution des problèmes soulevés en signalant et soulignant les points qui nous paraissent encore inaccessibles, qu'en les escamotant.

Nos lecteurs voudront bien nous pardonner notre indigence dans ce paragraphe.

Avec une approximation grossière, et pour avoir une base de calcul, nous avons estimé que le volume des cornes du ménisque équivalait à une demi-division soit à environ  $0 \text{ cm}^3 006$ .

## 3° Conclusion.

Les interprétations graphiques exactes des formules que nous établirions dans ce mémoire nécessiteraient une exacte connaissance des valeurs de «  $m$  » et de «  $da$  » dans la méthode et avec le butyromètre Gerber. Nous n'avons pas effectué ces déterminations expérimentales, aussi précisons-nous bien que les graphiques illustrant notre exposé ne sont donnés que pour aider à la compréhension du texte, sans prétention à une exactitude rigoureuse.

Notre but en présentant ces notes n'est pas d'apporter des résultats mais :

1° De proposer une étude théorique propre à guider les chercheurs ;

2° D'attirer l'attention des utilisateurs sur les conséquences possibles de certaines erreurs.

## III. Cas des butyromètres « au litre »

### 1° Graduation rigoureuse.

Si  $\theta$  est la teneur en matière grasse par litre de lait, dans le cas des butyromètres gradués « au litre » utilisés dans la méthode Gerber, la relation donnant la teneur devient .

$$\theta = \frac{(v + m) da \times 1.000 \times D}{11 \times D} \quad \text{équation n° 1}$$

( $D$  étant la densité du lait de teneur  $\theta$ ) :

d'où :

$$v = \frac{11 \theta}{1.000 \text{ da}} - m \quad \text{équation N° 2}$$

«  $v$  » est une fonction linéaire de «  $T$  ». Par un raisonnement analogue à celui que nous avons appliqué à l'étude de la graduation du butyromètre Røeder [1] on démontre que :

a) Dans un butyromètre Gerber conçu pour donner les résultats en grammes de matière grasse par litre de lait et gradué rigoureusement, deux graduations consécutives limitent un volume constant  $v'$  tel que :

$$v' = \frac{11}{1.000 \text{ da}}$$

b) La correction relative au volume du ménisque porte sur l'emplacement de la graduation 0. Le volume compris entre la graduation 0 et la graduation 10 par exemple sera égal à :

$$v_0 = \frac{11}{1000 \text{ da}} - m$$

## 2° Graduation à l'équidistance de 0 à 70.

La construction de butyromètres à graduations équidistantes est plus facile que celle de butyromètres rigoureusement exacts dans lesquels on tiendrait compte, à l'emplacement de la graduation 0 du volume des cornes du ménisque.

En conséquence nous nous proposons :

a) De rechercher le système de graduation à l'équidistance permettant d'obtenir les résultats les plus approchés des résultats exacts ;

b) D'examiner dans quelles limites ce système de graduation est applicable.

Représentons graphiquement les variations du volume compris dans la lecture «  $v$  » en fonction de la teneur  $\theta$ , dans un butyromètre gradué rigoureusement.

Nous obtenons une droite (D) (graphique I).

Soit  $\gamma$  le volume constant d'une graduation dans un butyromètre gradué à l'équidistance.

Le volume compris dans la lecture correspondant à une certaine teneur lue  $\theta'$  est égal à  $\gamma \theta'$ , et la représentation graphique de ce volume en fonction de  $\theta'$  est une droite (D') passant par 0. (Graphique I).

(D') peut couper (D) en un certain point P.

Un point quelconque d de (D) correspond à un certain volume  $v$

et à une teneur réelle  $\theta$ . Au même volume  $v$ , c'est-à-dire à la même teneur réelle  $\theta$  correspond sur (D') le point  $d'$  et la teneur lue  $\theta'$ .

Il est bien évident que  $\theta'$  sera d'autant plus proche de  $\theta$  que le point  $d'$  sera plus proche du point  $d$ , et d'une manière générale que la droite (D') sera plus voisine de la droite (D).

En particulier pour la teneur  $\theta^0$  qui correspond au point P,

butyromètre gradué à l'équidistance donnera un résultat rigoureusement exact. La plupart des laits contiennent entre 30 et 40 grammes de matière grasse par litre de lait. On doit donc rechercher à obtenir les résultats les plus exacts pour des laits ayant des teneurs comprises dans ces limites. Pour obtenir ce résultat il suffit que le point P corresponde à la teneur  $\theta = 35$ , ce qui nous conduit à déterminer mathématiquement la valeur optimum pour  $\gamma$  en posant :

$$35 \gamma = \frac{11 \times 35}{1.000 \text{ da}} - m$$

il vient :

$$\gamma = \frac{11}{1.000 \text{ da}} - \frac{m}{35} \quad \text{équation n° 3}$$

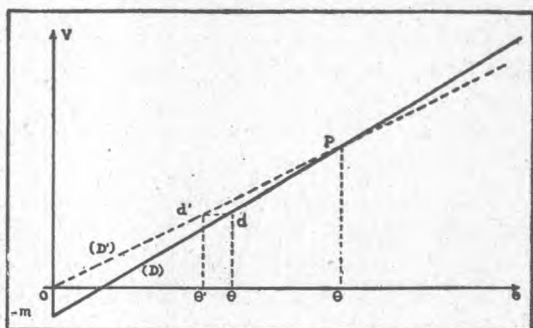
### 3° Influence de la graduation à l'équidistance sur l'exactitude des résultats, toutes choses étant justes par ailleurs.

Soit un lait de teneur réelle  $\theta$  grammes par litre, il lui correspond un volume total de matière grasse séparée « V » et un volume compris entre les graduations « v » tel que :

$$v = \frac{11 \theta}{1.000 \text{ da}} - m$$

la teneur lue  $\theta'$  sera égale à  $\frac{v}{\gamma}$

et en remplaçant  $\gamma$  par sa valeur tirée de l'équation n° 3,



GRAPHIQUE I

il vient :

$$\theta' = \frac{385 \theta - 35.000 \text{ da. m}}{385 - 1.000 \text{ da. m}}$$

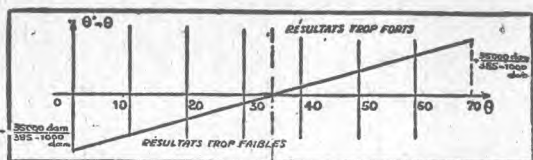
La différence entre la teneur lue  $\theta'$  et la teneur réelle  $\theta$  est égale à :

$$\theta' - \theta = \frac{1.000 \text{ da. m} (\theta - 35)}{385 - 1.000 \text{ da. m}}$$

Cette relation montre que le volume des cornes du ménisque a une influence sur l'exactitude des résultats dans un butyromètre gradué à l'équidistance. Si l'on tolère une approximation de 1 division dans la lecture du butyromètre, les lectures aux extrémités de l'échelle ne seront acceptables que si le volume des cornes du ménisque est inférieur ou égal au volume d'une division.

S'il est supérieur, ou si l'on exige une plus grande précision de la méthode, le butyromètre ne peut être utilisé que dans une certaine zone.

Connaissant la valeur de « m » (qui devra être déterminée expérimentalement), la variation de l'écart  $\theta - \theta'$  en fonction de la



GRAPHIQUE II

teneur  $\theta$  pourra se représenter graphiquement. Ce graphique (qui aura l'allure du graphique II) permettra de trouver entre

quelles teneurs le butyromètre donnera des résultats avec une exactitude comprise dans telles limites de tolérances que l'on voudra lui assigner, toutes autres choses étant justes par ailleurs.

#### 4<sup>o</sup> Influence sur les résultats de l'adoption d'une valeur inexacte pour da.

a) Dans un butyromètre au litre gradué rigoureusement :

soit :

$\theta$  la teneur réelle du lait analysé,

$\theta'$  la teneur lue,

« da » la valeur exacte de la densité apparente,

« da' » la valeur de densité apparente adoptée pour la graduation, à une teneur  $\theta$  correspond un volume « v » de M. G. séparée compris entre les graduations,

tel que :

$$v = \frac{11 \theta}{1.000 da} - m$$

et au volume « v » une teneur lue  $\theta'$  telle que :

$$v = \frac{11 \theta'}{1.000 da'} - m$$

$$\frac{11 \theta}{1.000 da} = \frac{11 \theta'}{1.000 da'}$$

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{da'}{da}$$

$$\theta' - \theta = \theta \frac{da' - da}{da}$$

Supposons que :

$$da = 0,900 :$$

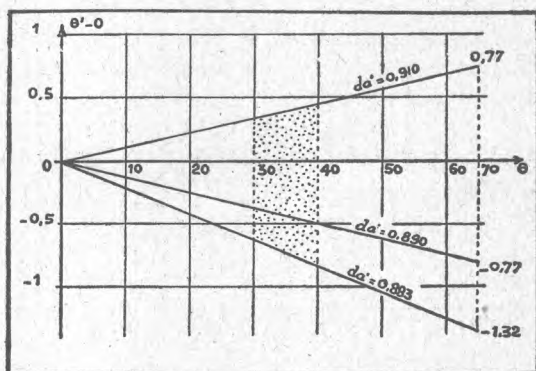
$$\text{si } da' = 0,883 \dots \quad \frac{da' - da}{da} = -\frac{17}{900} \quad \text{d'où } \theta' - \theta = -\theta \frac{17}{900}$$

$$\text{si } da' = 0,890 \dots \quad \frac{da' - da}{da} = -\frac{1}{90} \quad \text{d'où } \theta' - \theta = -\frac{\theta}{90}$$

$$\text{si } da' = 0,910 \dots \quad \frac{da' - da}{da} = +\frac{1}{90} \quad \text{d'où } \theta' - \theta = +\frac{\theta}{90}$$

La variation de  $\theta' - \theta$  peut se représenter graphiquement en fonction de  $\theta$  (graphique III).

Dans la zone normale des teneurs l'erreur commise du fait de l'adoption d'une valeur inexacte pour « da » dans un butyromètre gradué rigoureusement peut



GRAPHIQUE III

donc dépasser une demie graduation si l'on adopte la valeur de 0,883 au lieu de 0,900, ou inversement ;

b) Dans un butyromètre gradué à l'équidistance :

On démontre par un calcul analogue à celui exécuté ci-dessus que.

$$\theta' - \theta = \frac{355 \theta (da' - da) + 1.000 da da' m (\theta - 35)}{(385 - 1.000 da' m) da}$$

posons :

$$\begin{aligned} \Delta da &= da' - da \\ da' &= \Delta da + da \\ da &= 0,900 \\ m &= 0 \text{ cm}^3 006 \end{aligned}$$

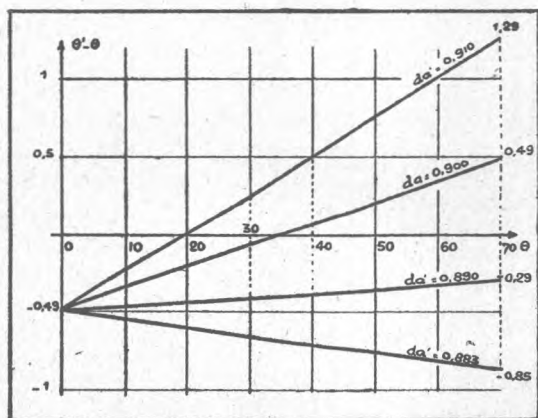
il vient :

$$\theta' - \theta = \frac{\theta (390,4 \Delta da + 4,86) - 189 \Delta da - 170,10}{341,64 - 5,4 \Delta da}$$

$$\text{pour } da' = 0,883 : \Delta da = - 0,017 \quad \theta' - \theta = \frac{1,77 \theta - 166,887}{341,73}$$

$$\text{pour } da' = 0,890 : \Delta da = - 0,010 \quad \theta' - \theta = \frac{0,956 \theta - 168,21}{341,69}$$

$$\text{pour } da' = 0,910 : \Delta da = + 0,010 \quad \theta' - \theta = \frac{8,76 \theta - 171,99}{341,586}$$



GRAPHIQUE IV

au lieu de 0,900 ou inversement.

Il est possible de faire une représentation graphique de la variation de l'erreur  $\theta' - \theta$  en fonction de  $\theta$  (graphique IV).

Dans la zone normale des teneurs l'erreur est du même ordre de grandeur et peut dépasser une demi graduation pour  $da = 0,883$

#### IV. Cas des butyromètres gradués au kilogramme

Si  $\tau$  est la teneur en matière grasse par kilogramme de lait, dans

le cas des butyromètres gradués « au kilogramme » utilisés dans la méthode Gerber, la relation donnant la teneur devient :

$$\tau = \frac{(v + m) da \times 1.000}{11 D}$$

### 1. Variation de la densité des laits.

La densité du lait augmente quand sa teneur en matière grasse diminue. On peut considérer les « laits » proposés aux analyses comme des mélanges en proportions variables de deux constituants bien définis ; d'une part la graisse de densité  $d_2$ , d'autre part le lait écrémé de densité  $d_1$ .

Soit  $\tau$  la teneur du lait en grammes de matière grasse par kilogramme de lait et « L » la teneur en grammes de lait écrémé par kilogramme de lait.

Le poids d'un kilogramme de lait est égal à la somme des poids de ses composants.

Exprimons ceci en grammes :

$$1.000 = \tau + L \quad (1)$$

Ces composants n'étant pas solubles l'un dans l'autre, le volume d'un kilogramme de lait est égal à la somme des volumes de ses composants. Si D est la densité du lait ce volume exprimé en centimètres cubes est égal à :

$$\frac{1.000}{D}$$

nous avons :

$$\frac{1.000}{D} = \frac{\tau}{d_2} + \frac{L}{d_1}$$

on tire de cette dernière équation la valeur de

$$L = d_1 \left( \frac{1.000}{D} - \frac{\tau}{d_2} \right)$$

portons cette valeur dans (1) :

$$1.000 = \tau + d_1 \left( \frac{1.000}{D} - \frac{\tau}{d_2} \right)$$

équation qui donne D en fonction de  $\tau$  :

$$D = \frac{1.000 d_1 d_2}{1.000 d_2 + \tau (d_1 - d_2)} \quad \text{équation n° 5}$$

Pour une même valeur de  $\tau$  :

« D » est constant si «  $d_1$  » et «  $d_2$  » sont constants. Or ni la « graisse », ni le « lait écrémé » ne sont des corps simples rigoureusement définis ; ils ont des mélanges de différents corps en proportions variables, on ne peut admettre a priori que «  $d_2$  » et «  $d_1$  » soient constants dans tous les laits.

Pour une même valeur de  $\tau$ , « D » varie avec «  $d_2$  » et «  $d_1$  ».

a) *Variations de  $d_2$ .*

D'assez nombreux expérimentateurs ont mesuré la densité réelle de la matière grasse pure du lait. Les chiffres qu'ils donnent sont sensiblement différents. Pour les mesures faites à 15° C., ils sont compris entre 0,910 (BOURCART) et 0,950 (DEMICHEL). M. PIEN et M<sup>lle</sup> MAURICE ont particulièrement bien étudié cette mesure [5] et ils ont proposé une explication des différences constatées.

La matière grasse provenant des produits acides aurait un chiffre de densité plus élevé que celle provenant de produits non acidifiés (1).

*Exemple.* Densité de la matière grasse pure de beurres provenant de crèmes acides : 0,923.

Densité de la matière grasse pure provenant de lait doux 0,915. C'est donc ce chiffre qui devrait être retenu.

Toutefois comme il est possible que d'autres facteurs interviennent nous croyons intéressant de mesurer la répercussion des variations extrêmes de  $d_2$  sur la valeur de D.

Nous ne retiendrons pas comme limites extrêmes les chiffres de 0,910 et 0,950 parce que nous ne connaissons pas les méthodes opératoires adoptées respectivement par BOUCART et DEMICHEL, mais nous prendrons 0,915 (chiffre de PIEN-MAURICE) et 0,930 (chiffre de FLEISCHMANN).

(1) Ces auteurs considèrent comme matière grasse « pure » celle qui est extraite directement par solvant éthéro-ammoniacal. Méthode d'Adam, elle peut avoir une composition différente de la matière grasse « pure » extraite par d'autres procédés. Par exemple la matière grasse « pure » extraite par solvant éthéro-ammoniacal contiendra des lécithines. La matière grasse « pure » extraite par la méthode S. B. R. n'en contiendra pas. Il est normal que ces diversités de composition se traduisent par des propriétés différentes ; et en particulier par des poids spécifiques différents. Cette explication complète celle de PIEN-MAURICE. L'importance des écarts relevés montre la nécessité d'adopter en tous pays et avant toute autre chose une méthode standard d'extraction de la matière grasse. La matière grasse extraite par cette méthode serait considérée comme matière grasse pure-étalon. La méthode devrait pouvoir être appliquée à tous les produits laitiers ; les variantes d'exécution être soigneusement indiquées (Cette standardisation n'existe actuellement que pour le dosage de la matière grasse dans les fromages.)

b) *Variation de  $d_1$ .*

Le lait écrémé est un produit encore moins défini que la matière grasse. Sa composition varie dans des limites sensibles, variations qui se traduisent par des variations de densité.

HUNZIKER [6] donne les limites suivantes à 60° F. (15°55 C.) 1035 à 1038, moyenne 1036.

c) *Variation de  $D$  pour une même valeur de  $\tau$ .*

Pour une même valeur de  $\tau$ ,  $D$ , a sa valeur maximum si  $d_2$  et  $d_1$  ont respectivement leur valeur maximum et  $D$  a sa valeur minimum si  $d_2$  et  $d_1$  ont leur valeur minimum,

donc :

$$D \text{ max.} = \frac{965,34}{930 + 0,108 \tau}$$

$$D \text{ min.} = \frac{947,025}{915 + 0,120 \tau}$$

$$D \text{ max.} - D \text{ min.} = \frac{13,5621 \tau + 2553,85}{0,01296 \tau_2 + 210,42 \tau + 850,950}$$

Etudions la variation de cette fonction :

prenons la dérivée de  $(D \text{ max.} - D \text{ min.})$ ,

Le numérateur de cette dérivée est égal, tous calculs faits, à  $-0,17576 \tau_2 - 66,19579 \tau + 11.462.980,878$ .

Ce numérateur reste positif pour toutes les valeurs de  $\tau$  comprises entre 0 et 70.

$(D \text{ max.} - D \text{ min.})$  croît quand  $\tau$  croît de 0 à 70 et atteint une valeur maximum pour  $\tau = 70$ .

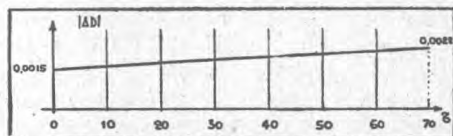
Cette valeur, tous calculs faits, est égale à  $+0,0044$ .

$D \text{ max.} - D \text{ min.}$ , si  $\tau = 0$ , est évidemment égal à  $1,038 - 1,056 = 0,003$ .

Si l'on adopte pour  $D$  une valeur moyenne (en prenant pour  $d_2$  et  $d_1$  leurs moyennes) l'erreur commise alors est pour  $\tau_2 = 70$ , égale à  $\pm 0,0022$ , et pour  $\tau = 0$ , égale à  $\pm 0,0015$ .

Etant données les faibles valeurs mises en jeu la courbe des variations de  $(D \text{ max.} - D \text{ min.})$  en fonction de  $\tau$  peut être assimilée à une droite.

Posons  $(\Delta D) =$  valeur absolue de l'erreur maximum commise sur la densité  $D$  quand on la détermine à l'aide de l'équation 5 en donnant à  $d_2$  et  $d_1$  respec-



GRAPHIQUE V

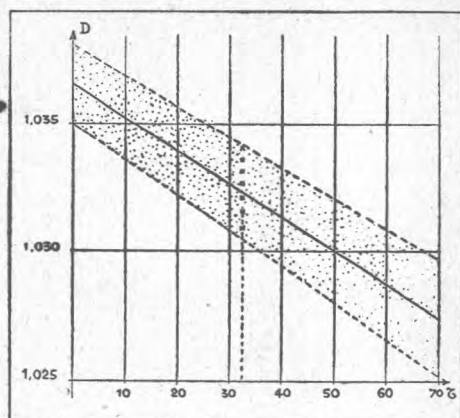
tivement leurs valeurs moyennes. La variation de  $(\Delta D)$  en fonction de  $\tau$  peut se représenter graphiquement (graphique V) par une droite d'équation.

$$(\Delta D) = 0,00001 \tau + 0,0015 \quad \text{équation n}^\circ 6$$

d) *Variation de D en fonction de  $\tau$*

L'équation 5 quand on y remplace  $d_2$  par 0,9225 et  $d_1$  par 1,0365 nous donne :

$$D = \frac{956,17}{922,5 + 0,114 \tau} \quad \text{équation n}^\circ 7$$



GRAPHIQUE VI

équation qui fournit D en fonction de  $\tau$  avec une erreur maximum en plus ou en moins dont la valeur absolue est donnée par l'équation 6.

La variation de D en fonction de  $\tau$  peut être représentée graphiquement (graphique n<sup>o</sup> VI).

L'arc d'hyperbole très tendu qui figure la variation peut être assimilé à une droite d'équation :

$$D = - 0,000127 \tau + 1,03646 \quad \text{équation n}^\circ 8$$

Si nous dressons un tableau comparatif des valeurs de D déterminées à l'aide de l'équation n<sup>o</sup> 7 et des valeurs de D déterminées à l'aide de l'équation n<sup>o</sup> 8.

$\tau$	0	10	20	30	40	50	60	70
D. équation 7 ...	1,0365	1,0352	1,0339	1,0326	1,0314	1,0301	1,0288	1,0276
D. équation 8 ...	1,0364	1,0351	1,0339	1,0326	1,0314	1,0300	1,0288	1,0275
Différence .....	0,0001	0,0001	0	0	0	0	0	0,0001

nous constatons que les erreurs commises en adoptant l'équation 8 pour déterminer D en fonction de  $\tau$  affectent seulement le quatrième chiffre après la virgule. Celles dues à l'imprécision éventuelle des valeurs adoptées pour  $d_1$  et  $d_2$  affectent le troisième. Par conséquent nous pouvons adopter l'équation 8 pour la détermination de D qui sera connue avec une erreur maximum donnée par l'équation 6.

Portant sur le graphique VI les valeurs limites de D et ombrant la surface comprise entre les 2 droites ainsi définies, nous pouvons dire qu'à une teneur  $\tau$  correspond une densité qui se trouve représentée sur la perpendiculaire menée en  $\tau$  à l'axe des  $\tau$  et à l'intérieur de la zone ombrée (voir graphique VI).

## 2. Graduation exacte.

De l'équation n° 2 nous tirons :

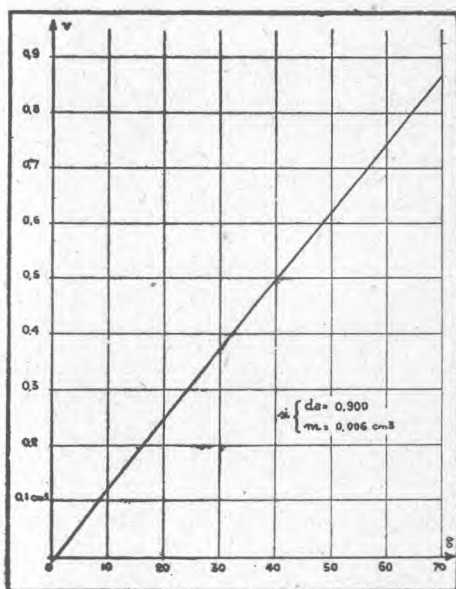
$$v = \frac{\tau \times 11 D}{1.000 da} - m$$

Remplaçons dans cette équation D par sa valeur tirée de l'équation n° 8 il vient :

$$v = \frac{-0,001397 \tau_2 + 11,40106 \tau}{1.000 da} m \quad \text{équation n° 9}$$

Cette équation nous donne les valeurs de  $v$  correspondant à une graduation rigoureuse (aux erreurs sur D près).

Partant d'elle nous pourrions démontrer comme nous l'avons fait pour les butyromètres Kœhler dans notre précédente étude [1] que si  $da$  est indépendant de la teneur et constant pour les laits analysés dans un butyromètre Gerber gradué « au kilogramme » le volume limité par deux graduations consécutives doit être d'autant plus petit que ces graduations



GRAPHIQUE VII

sont plus voisines de la graduation 70 le volume des graduations voisines de 0 peuvent faire exception. Puisque la correction due au volume des cornes du ménisque porte pa place de la graduation 0.

### 3. Graduation à l'équidistance:

Pratiquement la construction de butyromètres à graduations équidistantes est plus facile que celle de butyromètres rigoureusement exacts où serait tenu compte de l'inégalité théorique des volumes correspondants aux diverses teneurs et de la correction due au volume des cornes du ménisque.

Il reste à déterminer quel système de graduation à l'équidistance permettrait d'obtenir les résultats approchés les plus voisins des résultats exacts.

Représentons sur un graphique les variations du volume compris entre les graduations lues  $v$  en fonction de la teneur dans un butyromètre gradué rigoureusement, en prenant par exemple :

$$da = 0,900,$$

$$m = 0,006 \text{ cm}^3,$$

il vient :

$$v = \frac{-0,001397 \tau_2 + 11,401066}{900} - 0,006$$

$$v = -1,5 \cdot 10^{-6} \tau_2 + 1,266 \cdot 10^{-2} \tau - 0,006$$

$\tau$	0	10	20	30	40	50	60	70
$v$ .....	-0,006	0,12045	0,2466	0,3725	0,498	0,623	0,7482	0,8729

nous obtenons un arc de parabole extrêmement tendu et très voisin d'une droite (graphique VII).

Nous pouvons pratiquement reprendre un raisonnement analogue à celui précédemment proposé pour les butyromètres gradués au litre (III-2) et déterminer la valeur optimum pour  $\gamma^0$  :

$$35 \gamma^0 = \frac{-0,001397 (35)^2 + 11,40106 (35)}{1.000 da} - m$$

d'où

$$\boxed{\gamma^0 = \frac{11,352}{1.000 da} - \frac{m}{35}} \quad \text{équation n}^\circ 10$$

#### 4. Influence de la graduation à l'équidistance sur l'exactitude des résultats, toutes choses étant justes par ailleurs.

Soit un lait de teneur réelle  $\tau$  gramme par kilogramme, il lui correspond un volume total de matière grasse séparée  $V$  et un volume compris entre les graduations :

$$v = \frac{-0,001397 \tau^2 + 11,40106 \tau}{1.000 \text{ da}} - m$$

la teneur lue  $\tau'$  sera égale à  $\frac{v}{\gamma^0}$

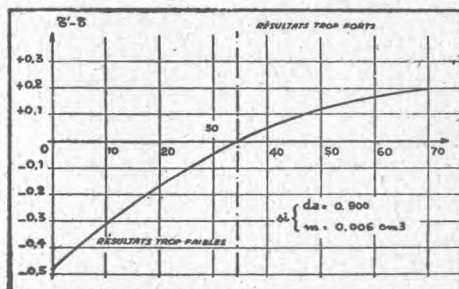
et en remplaçant  $\gamma^0$  par sa valeur tirée de l'équation 10 :

$$\tau' = \frac{0,04889 \tau^2 + 399,0371 \tau - 35000 \text{ dam}}{397,25 - 1.000 \text{ dam}}$$

$$\tau' - \tau = \frac{-0,04889 \tau^2 + (1,787 + 1.000 \text{ dam}) \tau - 35.000 \text{ dam}}{397,25 - 1.000 \text{ dam}}$$

la valeur de  $\tau' - \tau$  peut se représenter graphiquement par un arc de parabole très tendu.

Traçons le graphique pour  $da = 0,900 \text{ m} = 0,006$  (graphique VIII) :



GRAPHIQUE VIII

$$\tau' - \tau = -1,24 \cdot 10^{-2} \tau^2 + 1,8310^{-2} \tau - 0,48$$

$\tau$	0	10	20	30	40	50	60	70
$\tau' - \tau$ .....	-0,48	-0,31	-1,16	-0,05	+0,06	+0,12	+0,17	+0,20

#### 5. Influence sur les résultats de l'adoption d'une valeur inexacte pour $da$ .

a) Dans un butyromètre au kilogramme gradué rigoureusement.

Soit  $\tau$  la teneur réelle du lait analysé,

$\tau'$  la teneur lue,

$da$  la valeur exacte de la densité apparente,

$da'$  la valeur de densité apparente adoptée pour la graduation.

A une teneur  $\tau$  correspond un volume de matière grasse séparée compris entre la graduation :

$$v = \frac{-0,001397 \tau^2 + 11,40106 \tau}{1.000 da} - m$$

et au volume  $v$  une teneur lue  $\tau'$  telle que :

$$v = \frac{-0,001397 \tau'^2 + 11,40106 \tau'}{1.000 da'} - m$$

$$\frac{-0,001397 \tau'^2 + 11,40106 \tau'}{da'} = \frac{-0,001397 \tau^2 + 11,40106 \tau}{da}$$

$$\text{Posons } a = -0,001397 \quad b = 11,40106,$$

il vient :

$$\frac{\tau'^2 + b\tau}{a\tau^2 + b\tau} = \frac{da'}{da}$$

qui peut s'écrire :

$$\frac{a\tau'^2 + b\tau' - a\tau^2 - b\tau}{a\tau^2 + b\tau} = \frac{da' - da}{da}$$

soit :

$$\frac{a(\tau' + \tau)(\tau' - \tau) + b(\tau' - \tau)}{\tau(a\tau + b)} = \frac{da' - da}{da}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \frac{a\tau' + a\tau + b}{(a\tau + b)} (\tau' - \tau) &= \tau \frac{da' - da}{da} \\ \left( \frac{a\tau'}{a\tau + b} + 1 \right) (\tau' - \tau) &= \tau \frac{da' - da}{da} \\ \tau' - \tau &= \tau \frac{da' - da}{da} \left[ \frac{1}{1 + \frac{a\tau'}{a\tau + b}} \right] \end{aligned}$$

$\frac{a\tau'}{a\tau + b}$  est maximum en valeur pour  $\tau' = 70$ ,

et pour cette même valeur  $\tau = 70$  :

$$\begin{aligned} \frac{a\tau'}{a\tau + b} &= -0,008 \\ \frac{1}{1 + \frac{a\tau'}{a\tau + b}} &= \frac{1}{0,992} = 1,008 \end{aligned}$$

si l'on pose  $da' = 0,883$  :

$$\frac{da' - da}{da} = 1,322$$

et :

$$\frac{da' - da}{da} \times \frac{1}{1 + \frac{a\tau'}{a\tau + b}} = 1,332$$

c'est-à-dire que la suppression dans les calculs du terme :

$$\frac{1}{1 + \frac{a\tau'}{a\tau + b}}$$

entraîne *au plus* à une différence de 0,01 sur les résultats ce qui est sans importance étant donné l'ordre de grandeur des résultats cherchés. Par conséquent on peut admettre pratiquement :

$$\tau' - \tau = \tau \frac{da' - da}{da}$$

équation analogue à celle établie par les butyromètres au litre, la variation de  $\tau' - \tau$  en fonction de  $\tau$  se représente par le même graphique (graphique III).

b) *Dans un butyromètre au kilogramme gradué à l'équidistance.*

Par un calcul analogue aux précédents nous établissons les tableaux de variations de  $\tau' - \tau$  en fonction de  $\tau$  pour  $da' = 0,910$ ,  $da' = 0,890$  et  $da' = 0,883$  (variations de  $\tau' - \tau$  en fonction de  $\tau$  pour  $da = 0,900$ , graphique VIII).

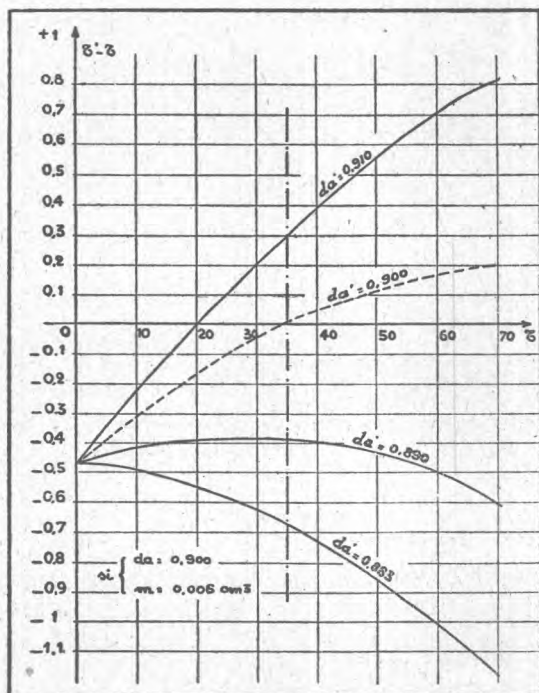
$\tau$	$\tau' - \tau$		
	$da' = 0,910$	$da' = 0,890$	$da' = 0,883$
0.....	- 0,48	- 0,48	- 0,47
10.....	- 0,22	- 0,42	- 0,50
20.....	0	- 0,39	- 0,55
30.....	+ 0,21	- 0,39	- 0,63
40.....	+ 0,40	- 0,40	- 0,72
50.....	+ 0,56	- 0,44	- 0,85
60.....	+ 0,70	- 0,50	- 1,05
70.....	+ 0,81	- 0,61	- 1,17

Le graphique IX met en relief l'ensemble des résultats obtenus.

### 6. Influence sur les résultats des variations de $D$ correspondant à la même teneur.

Nous avons vu précédemment (équations 6 et 8) que  $D$  était donné par l'équation :

$$D = -0,000127 \tau + 1,03646 \pm (0,00001 \tau + 0,0015)$$



GRAPHIQUE IX

l'erreur maximum commise sur  $D$  ne peut donc dépasser 0,0022 quand on prend l'équation précédente pour la déterminer. Soit un lait de teneur réelle  $\tau$  et de densité  $D$  il lui correspond un volume de matière grasse séparée compris entre les graduations :

$$v = \frac{\tau \times 11 D}{1.000 da} = m$$

si l'on a pris une valeur  $D'$  pour graduer le butyromètre la teneur lue  $\tau'$  est donnée par la relation :

$$v = \frac{\tau' \times 11 D}{1.000 da} = m$$

d'où il s'ensuit que :

$$\tau D = \tau' D'$$

et par un simple calcul :

$$\tau' - \tau = \frac{D - D'}{D}$$

$D'$  varie en fonction de  $\tau$  et atteint sa valeur minimum quand  $\tau$  atteint sa valeur maximum soit  $\tau = 70$   $D' = 1,0275$  (graphique VI).

$\tau' - \tau$  est maximum pour  $(D - D')$  maximum et  $\tau = 70$  ; mais  $(D - D')$  maximum = 0,0022 ;

$$\text{donc } (\tau' - \tau) \text{ maximum} = 70 \frac{0,0022}{1,0275} = 0,15$$

l'erreur maximum commise sur  $\tau$  du fait des variations éventuelles de D pour une même teneur est inférieure ou égale à 0,15.

### V. Comparaison entre le butyromètre gradué au litre et le butyromètre gradué au kilogramme

Nous avons démontré que pour les butyromètres donnant les résultats au litre la graduation équidistante la plus rigoureuse devrait limiter entre chaque graduation un volume :

$$\gamma = \frac{11}{1.000 \text{ da}} - \frac{m}{35}$$

pour les butyromètres au kilogramme un volume :

$$\gamma^0 = \frac{11,35}{1.000 \text{ da}} - \frac{m}{35}$$

Avec ces formules, nous avons établi le tableau comparatif ci-après :

da	Centimètres cubes Volume total de l'échelle		Différences
	Butyromètre gradué :		
	Au kilogramme	Au litre	
0,883 .....	0,887	0,8600	0,027
0,890 .....	0,880	0,853	0,027
0,900 .....	0,870	0,843	0,027
0,910 .....	0,861	0,834	0,027

Les volumes sont ceux des échelles à la température de lecture, soit 65-70° à la graduation 70, et si  $m = 0,0006 \text{ cm}^3$ .

Si  $l$ , est le coefficient de dilatation cubique des verres utilisés entre 0 et 100° :

$v_0$  le volume à 0°,

$v_{15}$  le volume à 15°,

$v_{67}$  le volume à 67°,

il vient :

$$v_{15} = v_0 (1 + 15 l)$$

$$v_{67} = v_0 (1 + 67 l)$$

d'où l'on tire :

$$v_{15} = v_{67} \frac{1 + 15 l}{1 + 67 l}$$

et en prenant :

$$ls = 22,5 \cdot 10^{-6}$$

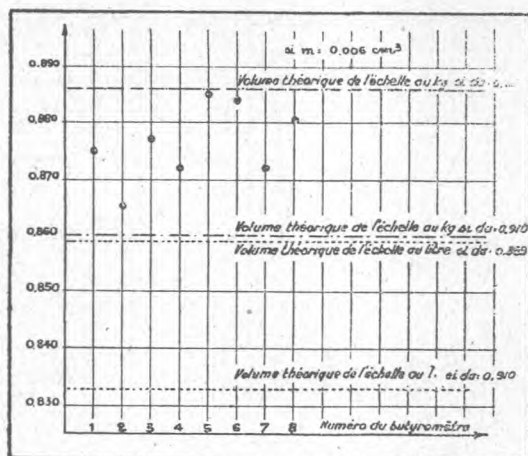
il vient :

$$v_{15} = v_{67} \times 0,9989$$

et le tableau des volumes totaux à 15° C. devient :

da	Volumes en centimètres cubes	
	Butyromètre gradué :	
	Au kilogramme	Au litre
0,883 .....	0,886	0,859
0,890 .....	0,879	0,852
0,900 .....	0,869	0,842
0,910 .....	0,860	0,833

Il est bien évident que ce calcul de correction est illusoire étant donnée l'imprécision avec laquelle « m » a été arbitrairement choisi. Il est simplement indiqué ici pour marquer l'ordre de grandeur des variations de volume de l'échelle de 15° C. à 67° C.



GRAPHIQUE X

Huit butyromètres Gerber, de différentes origines, étalonnés au mercure, avec les précautions précédemment mentionnées [7], ont donné les résultats consignés sur le graphique X.

Ces résultats sembleraient bien indiquer (si toutefois « da » ne sort pas des limites envisagées et si « m » est voisin de 0 cm<sup>3</sup> 006) que ces butyromètres sont gradués *au kilogramme* ou tout au moins donnent les résultats en grammes de matière grasse par kilogramme de lait (graphique XI).

Réciproquement dans cette hypothèse (graduation au kilogramme, avec  $m = 0 \text{ cm}^3 006$ ) les valeurs de « da » adoptées, *en fait* pour la graduation, varieraient entre 0,883 et 0,905 — en moyenne

0,8937, correspondant au volume total moyen des échelles à 70 de 0 cm<sup>3</sup> 875.

## VI. Conclusions

L'étude théorique que nous venons de faire des butyromètres pour lait Gerber nous permet de conclure :

1° L'exacte connaissance du volume des cornes du ménisque est nécessaire pour leur graduation rigoureuse, sur des bases mathématiques ;

2° Les variations de la composition du lait n'influent pratiquement pas sur la valeur à attribuer au volume compris entre deux graduations consécutives ;

3° Les butyromètres gradués « au kilogramme » comme les butyromètres gradués « au litre » peuvent pratiquement être gradués à l'équidistance

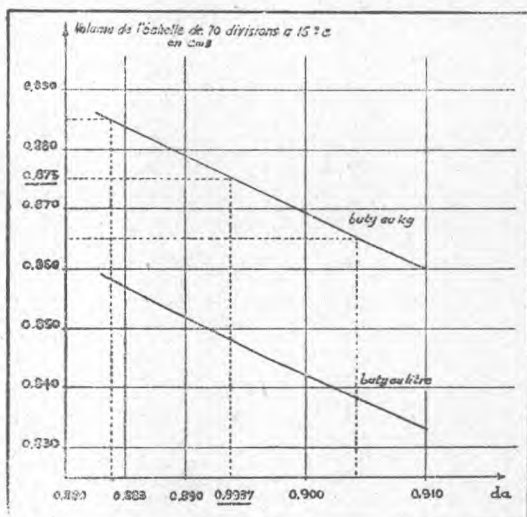
— mais leur précision aux extrémités de l'échelle est diminuée dans ce cas :

a) Dans les butyromètres « au litre », par la trop faible influence dans ces parages du volume des cornes du ménisque ;

b) Dans les butyromètres « au kilogramme » : à cette cause, se combine l'influence des variations de densité des laits analysés en fonction de leur teneur.

L'ordre de grandeur des erreurs ainsi faites aux différentes teneurs est indiquée par les graphiques II et VIII. Les mêmes graphiques indiquent entre quelles limites de teneur les butyromètres peuvent être employés avec précision théorique inférieure à telle valeur que l'on désirerait fixer.

RÆDER, remarquant que les analyses de lait écrémé donnaient des résultats trop faibles expliquait ce fait d'une manière physico-chimique [8], nous l'avons expliqué d'une manière mathématique mais il est bien possible que l'influence signalée par RÆDER se manifeste également. Elle serait mise en évidence dans



GRAPHIQUE XI

l'étude des variations éventuelles de la densité apparente avec la teneur.

Dans un but de simplification, pour la clarté de l'exposé — et nous autorisant de la grande précision universellement reconnue à la méthode pour omettre a priori cette possibilité nous avons étudié la graduation des butyromètres en donnant à « da » une valeur-constante quelles que soient les teneurs. Si des travaux expérimentaux montraient que « da » subit une variation régulière avec la teneur des laits il serait facile de modifier en conséquence les graphiques donnés, qui résument notre travail théorique ;

4° L'importance du choix d'une valeur exacte de la densité apparente pour la graduation est mise en évidence dans les graphiques III et IV pour les butyromètres gradués « au litre », III et IX pour les butyromètres gradués « au kilogramme » ;

5° La valeur du ménisque ayant été déterminée, l'exacte connaissance de « da » est la seule clef qui permettra de résoudre l'énigme : « Les butyromètres Gerber sont-ils gradués « au litre » ou « au kilogramme » ? ;

6° La mesure de quelques butyromètres d'origines diverses nous a montré que les bases adoptées par les différents constructeurs sont différentes (graphique X).

*Si la valeur de la densité apparente est comprise dans les limites que nous avons envisagées, les butyromètres courants seraient gradués au kilogramme ; si elle est comprise dans d'autres limites, ils pourraient être gradués au litre.*

On peut s'étonner que la catégorie des butyromètres ne soit pas toujours gravée sur la panse des appareils et on peut se demander si des constructeurs ne se cantonnent pas exprès, et faute de données précises, dans le vague ? Or l'industriel a besoin de connaître exactement la valeur de la matière première qu'il travaille, et il ne saurait se contenter de l'à peu près. Connaître la richesse exacte du lait qu'il achète est pour lui une nécessité absolue, pour le payer loyalement à son juste prix (et il ne peut admettre les critiques intempestives qui ébranlent, sans proposer de remèdes, la confiance des fournisseurs dans ses services d'analyses), pour contrôler sa fabrication et pour établir les rendements de son entreprise.

Nous estimerions avoir atteint le but que nous nous étions proposé si nous avons fourni aux services d'études des constructeurs les axes de recherche rationnels qui leur permettront de mettre au point d'une façon indiscutable la graduation de leurs butyromètres, et de les vendre sans ambiguïté.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] CADOR-MACHEREL. *Le Lait*, 1944, XXIV, 196.
- [2] POZZI-ESCOT. *Le Lait*, 1926, VI, 601.
- [3] RÖEDER. *Le Lait*. 1927, VII, 354.
- [4] PIEN. *L'Industrie Laitière*, n° du 15-10-1941.
- [5] PIEN-MAURICE. *Le Lait*, 1938, XVIII, p. 582.
- [6] HUNZIKER. *The Butter Industry*, p. 473.
- [7] CADOR-MACHEREL. *Le Lait*, 1944, XXIV, p. 289.
- [8] RÖEDER. *Milchwirtschaftliche Forschungen*, 1928, V, 258.

## LE CONTROLE DE LA PASTEURISATION DU LAIT ET DE LA CRÈME

par

JEAN PIEN

Ingénieur-Chimiste, Docteur es-Sciences

Directeur des Laboratoires de la Laiterie des Fermiers Réunis

L'une des réactions diastasiques les plus employées dans le contrôle de la pasteurisation est celle de la peroxydase, utilisée soit selon le mode opératoire de Dupouy (gaïacol), soit suivant celui de Storch (paraphénylènediamine), soit encore suivant celui de Rothenfusser (combinaison des deux précédents).

Or, les expérimentateurs qui utilisent journallement ces réactions constatent qu'elles sont parfois infidèles, en ce sens notamment qu'elles peuvent fournir des résultats positifs (apparition de la coloration) dans le cas de laits correctement pasteurisés, voire même dans le cas de laits chauffés à 95 ou 100°.

Cette circonstance est liée à la présence dans le lait de traces de métaux lourds (fer et surtout cuivre). On sait en effet que les sels de ces métaux peuvent donner la réaction des peroxydases dans le lait, en présence de l'oxygène atmosphérique dissous. On a d'ailleurs pu baser sur ce fait la recherche des contaminations du lait par le cuivre notamment, en opérant sur du lait bouilli et refroidi — dans lequel les peroxydases sont sûrement détruites. Bien que, dans ce cas, la réaction soit plus lente qu'en présence de peroxydases, il n'en est pas moins vrai que la recherche de ces dernières, c'est-à-dire le contrôle de la pasteurisation, risque de perdre tout son sens dans de nombreux cas de laits souillés de cuivre. Dans certains établissements où, du fait des circonstances actuelles, certains appareils en cuivre ou alliages de cuivre n'ont pu être rétamés ou remplacés, la réaction de la peroxydase ne fournit plus que des résultats douteux ou inutilisables.

Rappelons enfin que le contrôle de la pasteurisation des crèmes