LE LAIT

REVUE GÉNÉRALE DES QUESTIONS LAITIÈRES

SOMMAIRE

Mémoires originaux :

- J. PIEN. — Les bases théoriques et l'expression correcte de la formule de Fleischmann 129
- A. FÉCHALI. — Enquêtes et recherches récentes sur l'intoxication par le fromage dans le Proche et Moyen Orient 139
- N. KING. — Aspects scientifiques de la fabrication continue du beurre 142

REVUE :

- Production de lait et dérivés en Europe et dans le monde 152

Bibliographie analytique :

- 1^o Les livres 159
- 2^o Journaux, Revues, Sociétés savantes 171

Bulletin bibliographique :

- 1^o Les livres 205
- 2^o Journaux, Revues, Sociétés savantes 206
- 3^o Brevets 217

Supplément technique :

- G. GÉNIN. — L'utilisation des sous-produits de l'industrie laitière. 218

BULLETIN ANALYTIQUE :

- 1^o Revues 224
- 2^o Brevets 226

Documents et informations :

- L. M. HAMEL. — Notes historiques et bibliographiques sur le fromage de Roquefort 231
- Prescriptions d'hygiène applicables aux mesures de capacité pour liquides de capacité égale ou inférieure à deux litres 237
- Académie Vétérinaire. Président : G. THEULIN 238
- Salon de l'équipement laitier 1953 239
- IV^e Congrès International de Médecine Vétérinaire (Stockholm, 9-15 août 1953) 240

MÉMOIRES ORIGINAUX (1)

LES BASES THÉORIQUES ET L'EXPRESSION CORRECTE DE LA FORMULE DE FLEISCHMANN

par

JEAN PIEN

La formule de Fleischmann, qui rend toujours de si grands services dans l'analyse industrielle du lait et dans les analyses de triage des laboratoires officiels, n'est qu'un cas particulier d'un problème plus général qui peut s'énoncer ainsi : « Considérant la densité « du lait, sa teneur en matière grasse et en extrait sec (au litre ou

(1) R. production interdite sans indication de source.

« au kilogramme) déduire la valeur de l'un de ces trois termes de la « connaissance exacte des deux autres. »

Nous avons autrefois (1) étudié en détail ce problème général ainsi que ses applications au calcul de l'extrait sec du lait, du taux de concentration des laits condensés, de la densité de la crème, etc...

Nous voulons aujourd'hui revenir sur le cas particulier de la formule de Fleischmann pour en dégager les bases théoriques, assez peu connues de ceux qui l'emploient journellement et surtout pour en donner une expression correcte, tenant compte notamment de la définition officielle des unités de mesure.

Cette formule passe pour n'être que très approximative. Ce reproche n'est pas entièrement justifié ; il repose en partie sur certaines erreurs initialement contenues dans la formule et régulièrement reproduites depuis. Nous avons déjà corrigé l'une de ces erreurs (1). Nous allons aujourd'hui rectifier les autres et montrer finalement comment l'on doit appliquer cette formule pour en obtenir les meilleurs résultats. A l'heure où la méthode classique de détermination directe de l'extrait sec du lait est, à juste titre, très attaquée et où l'on travaille de divers côtés à l'améliorer, il a semblé opportun de redonner à la vieille formule de Fleischmann un regain d'intérêt, sous la triple réserve de la corriger, de la bien connaître et de l'utiliser correctement.

* * *

RAPPEL DES NOTIONS MODERNES SUR LES UNITÉS DE MESURE

Les unités de mesure, actuellement en usage obligatoire en France, ont été définies par la loi du 14 janvier 1948 et le décret d'application du 28 février 1948 (*Journal Officiel* du 7 mars 1948, p. 2365).

Pour l'application que nous avons à en faire ici, nous ne nous intéresserons qu'aux unités de volume, de masse et de densité.

Nous ne croyons pas inutile de rappeler que ces unités et celles qui en dérivent proviennent toutes de deux unités fondamentales, définies par les étalons internationaux du Pavillon de Breteuil, à Sèvres : le mètre et le kilogramme-masse. Il n'y a plus, depuis longtemps, de lien entre ces unités fondamentales et certaines grandeurs naturelles ou physiques.

Le mètre est défini par la longueur de l'étalon du mètre, de même que le kilogramme-masse est défini par la masse de l'étalon du kilogramme-masse, alors qu'autrefois, le mètre représentait la dix-millionième partie du quart du méridien terrestre et le

(1) *Le Lait*, juin 1938, page 582.

kilogramme-masse était la masse de un décimètre cube d'eau à 4° sous la pression de 76 cm de mercure.

L'unité de volume, le mètre cube, est définie par le volume contenu dans un cube de un mètre de côté et dérive donc directement de l'étalon du mètre. Il en est de même des sous-multiples : décimètre cube (dm^3), centimètre cube (cm^3), etc...

Le kilogramme-masse était donc, autrefois, lié au mètre par l'intermédiaire du décimètre cube. Il n'est plus de même aujourd'hui et il en résulte une conséquence importante dans la définition du litre.

Cas particulier du litre (unité de capacité).

Le litre est toujours défini par le volume d'un kilogramme-masse d'eau pure à 4° (max. de densité) et sous la pression de 76 cm de mercure.

Autrefois il y avait donc identité absolue entre le litre et le décimètre cube (le litre renfermait 1000 cm^3). Ce n'est plus le cas maintenant puisque le kilogramme-masse n'est plus la masse d'un dm^3 d'eau, mais la masse de l'étalon du kilogramme.

Or la comparaison expérimentale des poids (c'est-à-dire, pour un même lieu, des masses) du dm^3 d'eau à 4° (760 mm. de mercure) et de l'étalon de masse a fait apparaître une différence de masse de 27 milligrammes. L'étalon du kilogramme ayant une masse supérieure de cette quantité à celle du dm^3 d'eau. Donc le litre (volume du kilogramme-masse d'eau à 4°) est supérieur au volume du dm^3 d'eau à 4° d'une quantité égale au volume de 27 milligrammes-masse d'eau à 4° c'est-à-dire d'environ 27 millimètres cubes.

Un litre vaut donc $1 \text{ dm}^3 000027$ ou $1000,027 \text{ cm}^3$.

Il en résulte, évidemment, qu'un millilitre vaut $1,000027 \text{ cm}^3$. Cette différence est minime et peut, certes, être négligée dans la pratique. Nous allons voir, toutefois, qu'il y a lieu d'en tenir compte dans le calcul des densités.

Remarque. — Cet écart est valable pour toutes les températures puisqu'il exprime une différence entre deux définitions d'unités. Il est indépendant des matières auxquelles les mesures s'appliquent.

Densités absolues

La définition de la densité absolue, appelée encore masse spécifique ou masse volumique est la suivante : quotient de la masse d'un corps homogène par son volume. C'est la masse de l'unité de volume.

L'unité officielle est le rapport :

$$\frac{1 \text{ tonne}}{1 \text{ m}^3} = \frac{1 \text{ Kg}}{1 \text{ dm}^3} = \frac{1 \text{ g}}{1 \text{ cm}^3} = 1$$

Cas particulier de l'eau.

D'après cette définition, la densité absolue, ou masse spécifique de l'eau à 4° à la pression de 76 cm. de mercure, doit être représentée par le quotient d'une certaine masse d'eau (à 4°, 76 cm.) par exemple un kilogramme-masse, par le volume occupé par cette même masse dans les mêmes conditions (nous avons vu que ce volume était le litre ou 1000 millilitres). Donc, *par définition*, cette densité absolue vaut :

$$\frac{1 \text{ Kgm}}{1 \text{ litre}} = \frac{1 \text{ gm}}{1 \text{ ml}} = \frac{1}{1} = 1$$

Mais si l'on veut *exprimer* cette densité absolue ou masse spécifique de l'eau à 4° à l'aide de l'*unité officielle de densité* (et cela est obligatoire) on s'aperçoit que le quotient obtenu est différent de 1. L'unité officielle exprime le rapport :

$$\frac{\text{Kg}}{\text{dm}^3} \text{ ou } \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Et nous savons que 1 litre vaut 1000,027 cm³.

Donc la densité de l'eau à 4°, *définie* par le rapport :

$$\frac{1 \text{ kgm}}{1 \text{ litre}} \text{ ou } \frac{1 \text{ gm}}{1 \text{ ml}}$$

doit s'exprimer par le rapport :

$$\frac{1 \text{ Kg}}{1,000027 \text{ dm}^3} = \frac{1000 \text{ g}}{1000,027 \text{ cm}^3} = 0,999973$$

En résumé : la densité absolue, ou masse spécifique, de l'eau à 4° qui vaut, en fait, par définition : 1 (masse en grammes d'un millilitre) doit être *légalement* exprimée par la masse en grammes d'un centimètre cube c'est-à-dire par 0,999973.

Densité absolue de l'eau à diverses températures

L'expression officielle de la densité absolue ou masse spécifique de l'eau étant représentée par la masse en grammes d'un centimètre cube, il en résulte qu'à aucune température cette densité absolue ne sera égale à l'unité puisque la valeur 0,999973 correspond au maximum de densité (à 4°).

Cette masse spécifique varie évidemment avec la température et il est utile d'en connaître les valeurs pour quelques températures utiles :

Masse spécifique de l'eau pure :

	En g/cm ³	En g/ml
A 4° C.	0,999973	1,0
A 10° C.	0,999701	0,999727
A 15° C.	0,999099	0,999126
A 20° C.	0,998205	0,998230
A 25° C.	0,997047	0,997071

Remarque. — On passe de l'expression *officielle* (en g/cm³) à l'expression en g/ml en multipliant la première par 1,000027 puisque, comme nous l'avons vu, 1 millilitre (ml) = 1,000027 cm³.

Densités relatives

Pour les autres corps, solides ou liquides, on utilise rarement leur densité absolue (ou masse spécifique) mais plutôt leur *densité relative* c'est-à-dire le rapport de la masse d'un certain volume du corps, à la masse du même volume d'eau pure (dans les mêmes conditions de température et de pression).

Ces deux définitions correspondent à deux modes de détermination différents. Il est difficile de déterminer les densités absolues qui requièrent des mesures de volume rigoureuses. Il est plus facile et plus rapide de comparer des masses d'égal volume (méthode du flacon, balance hydrostatique).

Dans la pratique, les deux densités peuvent être prises l'une pour l'autre (à une même température et même pression). Mais pour un travail rigoureux, il est nécessaire de préciser de quelle densité l'on parle et à quelle température elle a été déterminée. On dira, par exemple, que la densité relative de tel corps vaut D_{20}^{20} exprimant par là le rapport de la masse d'un certain volume de ce corps à 20°, à la masse du même volume d'eau à 20°. De même, lorsqu'on dira que tel lait présente à 15° une densité relative égale à D_{15}^{15} on traduira ainsi le rapport de la masse d'un certain volume (par exemple un litre) de ce lait à 15° à la masse du même volume d'eau (un litre) à 15°.

On ne devrait donc jamais parler de la « densité » ou du « poids spécifique » ou de la « masse spécifique » du lait mais uniquement de sa *densité relative à t° C* puisque, pratiquement, c'est toujours par rapport à l'eau et non en valeur absolue que l'on détermine la « densité » du lait. Cette remarque vaut pour de très nombreuses substances solides ou liquides. Ce n'est que dans quelques cas particuliers de corps de référence (eau, mercure, ...) que l'on mesure la densité absolue ou masse spécifique et que l'on a le droit d'en parler.

Comparaison entre les densités absolues et les densités relatives

La densité relative d'un corps s'exprime par le rapport :

$$\frac{\text{masse totale de } V \text{ unités de volume de ce corps à } t^0 \text{ C.}}{\text{masse totale de } V \text{ unités de volume d'eau à } t^0 \text{ C.}}$$

ou encore :

$$\frac{\text{masse de l'unité de volume du corps à } t^0 \times V \text{ unités de volume}}{\text{masse de l'unité de volume de l'eau à } t^0 \times V \text{ unités de volume}}$$

Toutes ces unités de volume doivent être exprimées de la même façon. Or l'unité de volume officielle est le mètre cube ou son sous-multiple le centimètre cube (cm^3).

Donc :

Densité relative d'un corps à t^0 :

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{masse de } 1 \text{ cm}^3 \text{ du corps à } t^0 \times V \text{ cm}^3}{\text{masse de } 1 \text{ cm}^3 \text{ d'eau à } t^0 \times V \text{ cm}^3} \\ &= \frac{\text{masse de } 1 \text{ cm}^3 \text{ du corps à } t^0}{\text{masse de } 1 \text{ cm}^3 \text{ d'eau à } t^0} \\ &= \frac{\text{densité absolue ou masse spécifique du corps à } t^0}{\text{masse de } 1 \text{ cm}^3 \text{ d'eau à } t^0} \end{aligned}$$

Il en résulte que la masse spécifique à t^0 est égale à :
densité relative à $t^0 \times$ masse de 1 cm^3 d'eau à t^0 .

A 20° C. , par exemple, on a :

$$\begin{aligned} \text{Densité relative d'un corps à } 20^\circ \text{ (D } 20/20) &= \\ &= \frac{\text{masse spécifique du corps à } 20^\circ \text{ C.}}{0,998205} \end{aligned}$$

et masse spécifique à $20^\circ \text{ C.} =$
densité relative (D 20/20) $\times 0,998205$.

Dans le cas particulier de l'eau, sa « densité relative » c'est-à-dire sa « densité » par rapport à elle-même doit être évidemment constante et égale à 1 dans tous les cas.

Or la masse spécifique de l'eau à 20° vaut 0,998205.

Donc :

Densité relative de l'eau à $20^\circ = \frac{0,998205}{0,998205} = 1$. Le même rapport serait obtenu pour toutes les températures, ce qui confirme

l'exactitude du raisonnement. (Mais cette notion de « densité relative de l'eau » est sans signification pratique.)

En résumé. — La densité relative d'un corps est légèrement différente de sa densité absolue ou de sa masse spécifique.

* * *

THÉORIE DE LA FORMULE DE FLEISCHMANN "AU LITRE"

On peut considérer le lait entier comme un mélange, en proportions variables, des trois constituants essentiels suivants : l'eau, la matière grasse, l'extrait sec non gras (lactose, matières azotées, sels, etc...).

I. Expression de la masse d'un litre de lait en fonction de la masse de ses constituants

L'unité de mesure « analytique » est le litre de lait. Les prises d'essai sont représentées par un certain nombre de millilitres. Les résultats sont donc rapportés (en grammes de l'élément dosé) au litre de lait à t° C.

Si nous désignons par :

- p_t la masse d'eau en grammes renfermée dans un litre de lait à t° C,
 - B_t la masse de matière grasse en grammes renfermée dans un litre de lait à t° C,
 - e_t la masse d'extrait sec non gras en grammes renfermée dans un litre de lait à t° C,
 - M_t la masse en grammes d'un litre de lait entier à t° C,
- nous pouvons écrire :

$$M_t = p_t + B_t + e_t \quad (1)$$

II. Expression du volume d'un litre de lait en fonction de la masse de ses constituants

Il s'agit maintenant d'exprimer le volume des constituants en fonction de leur masse en divisant celle-ci par la masse spécifique des divers constituants.

Cas de l'eau.

Appelons m_t la masse spécifique de l'eau à t° C donnée par les tables (g/cm^3).

Nous avons désigné par p_t la masse totale en grammes de l'eau contenue dans un litre de lait. Donc le volume total (en cm^3) de l'eau contenue dans un litre de lait est égal à : $\frac{p_t}{m_t} (\text{cm}^3)$

Cas de la matière grasse et de l'extrait sec non gras.

La « densité » pratiquement connue de ces constituants n'est pas leur densité absolue (ou masse spécifique) mais seulement leur densité relative. On passera de celle-ci (connue) à celle-là (qui doit être utilisée) en utilisant la relation exposée plus haut :

Densité absolue (masse spécifique) à t^0 = densité relative à t^0 $\times$ masse de 1 cm³ d'eau à t^0 .

Appelons m'_t et m''_t les masses spécifiques de la matière grasse et de l'extrait sec non gras. Nous avons désigné par B_t et e_t les masses totales en grammes de ces constituants contenus dans un litre de lait. Leur volume total (en cm³) au litre de lait vaut donc :

$$\text{Volume de la matière grasse : } \frac{B_t}{m'_t} \text{ (cm}^3\text{)}$$

$$\text{Volume de l'extrait sec non gras : } \frac{e_t}{m''_t} \text{ (cm}^3\text{)}$$

Il va de soi que pour les calculs pratiques nous partirons des densités relatives de la matière grasse (D'_t) et de l'extrait sec non gras (D''_t) et nous aurons à effectuer le calcul préalable :

$$m'_t = D'_t \times m_t$$

$$m''_t = D''_t \times m_t$$

Nous pouvons maintenant écrire que le volume d'un litre de lait est égal à la somme des volumes des constituants. Ceux-ci sont donnés en centimètres cubes. Le litre de lait doit être exprimé de la même façon. Or nous savons que : 1 litre = 1000,027 cm³.

Donc :

$$1000,027 = \frac{p_t}{m_t} + \frac{B_t}{m'_t} + \frac{e_t}{m''_t} \quad (2)$$

III. Expression de la masse d'un litre de lait en fonction des masses de la matière grasse et de l'extrait sec non gras

Il s'agit d'éliminer entre les équations (1) et (2) la valeur de la masse de l'eau, contenue dans un litre de lait, qui n'est pas connue. De l'équation (2) nous tirons :

$$\frac{p_t}{m_t} = 1000,027 - \left(\frac{B_t}{m'_t} + \frac{e_t}{m''_t} \right)$$

$$\text{et} \quad p_t = m_t \left[1000,027 - \left(\frac{B_t}{m'_t} + \frac{e_t}{m''_t} \right) \right]$$

Portons cette valeur de p_t dans l'équation (1). Il vient :

$$\begin{aligned} M_t &= m_t \left[1000,027 - \left(\frac{B_t}{m'_t} + \frac{e_t}{m''_t} \right) \right] + B_t + e_t \\ &= 1000,027 m_t - \frac{m_t}{m'_t} B_t - \frac{m_t}{m''_t} e_t + B_t + e_t \\ &= 1000,027 m_t + B_t \left(1 - \frac{m_t}{m'_t} \right) + e_t \left(1 - \frac{m_t}{m''_t} \right) \end{aligned}$$

Posons :

$$a = 1 - \frac{m_t}{m'_t}, \quad b = 1 - \frac{m_t}{m''_t}$$

On peut écrire :

$$M_t = 1000,027 m_t + a B_t + b e_t \quad (3)$$

IV. Expression de la masse d'extrait sec total au litre de lait en fonction de la masse du litre de lait et de la masse de matière grasse qu'il renferme

Appelons E_t la masse d'extrait sec total en grammes au litre de lait à t° C. On a évidemment :

$$E_t = B_t + e_t$$

d'où :

$$e_t = E_t - B_t$$

Portons cette valeur dans l'équation (3). Il vient :

$$\begin{aligned} M_t &= 1000,027 m_t + a B_t + b (E_t - B_t) \\ &= 1000,027 m_t + B_t (a-b) + b E_t \end{aligned}$$

d'où nous tirons :

$$b E_t = M_t - 1000,027 m_t + (b-a) B_t$$

et finalement :

$$E_t = \frac{1}{b} (M_t - 1000,027 m_t) + \frac{b-a}{b} B_t \quad (4)$$

V. Expression de la masse d'extrait sec total au litre de lait en fonction de la densité relative du lait et de la masse de matière grasse au litre qu'il renferme

Le terme M_t représente la masse d'un litre de lait à t° C.

Or, dans l'analyse du lait, c'est la densité relative que l'on détermine, à une température donnée, à l'aide d'appareils (densimètres) gradués pour cette température.

La densité relative à t^0 C. est égale à la valeur du rapport suivant :

$$\frac{\text{masse d'un certain volume de lait à } t^0}{\text{masse du même volume d'eau à } t^0} = \frac{D_t}{\bar{t}}$$

Ce volume peut être quelconque. Ici, pour exprimer M_t (qui représente la masse de *un litre* de lait) en fonction de $\frac{D_t}{\bar{t}}$, il faut que les deux volumes considérés soient, l'un et l'autre, un litre.

Donc :

$$\frac{D_t}{\bar{t}} = \frac{\text{masse de 1 litre de lait à } t^0}{\text{masse de 1 litre d'eau à } t^0}$$

Or :

$$\begin{aligned} \text{masse de 1 litre de lait à } t^0 &= M_t \\ \text{masse de 1 litre d'eau à } t^0 &= 1000,027 \text{ cm}^3 \times \text{masse spécifique de l'eau à } t^0. \\ &= 1000,027 \times m_t. \end{aligned}$$

d'où :

$$\frac{D_t}{\bar{t}} = \frac{M_t}{1000,027 m_t}$$

$$\text{et} \quad M_t = \frac{D_t}{\bar{t}} \times 1000,027 m_t$$

Portons cette valeur dans l'équation (4). Nous aurons :

$$E_t = \frac{1}{b} \left(\frac{D_t}{\bar{t}} \times 1000,027 m_t - 1000,027 m_t \right) + \frac{b-a}{b} B_t$$

et finalement :

$$E_t = 1000,027 m_t \times \frac{1}{b} \left(\frac{D_t}{\bar{t}} - 1 \right) + \frac{b-a}{b} B_t \quad (5)$$

(A suivre.)